

時間離散的な伝染病モデルの大域的ダイナミクス

鈴木 宏 昌

Global Dynamics of Time-Discrete Epidemic Model

Hiromasa SUZUKI

Abstract

In this article, we study the global dynamics of time-discrete SIR model originated with Kermack and McKendrick. Our model system is derived from the simple discretization of ODE model. We show that the time-global dynamics of discrete model is qualitatively equal to that of continuous model.

1 はじめに

はしかやインフルエンザなど伝染病の流行過程の数理的な研究は、18世紀に始まる。とりわけ、Kermack と McKendrick による微分方程式モデルの開発が、伝染病数理モデルの近代的基礎を築いたといえる ([2], [1])。彼らの提唱したモデル方程式は非線形積分方程式であるが、出生、死亡などの過程を無視し、総人口が一定であるという仮定をおくことによって、簡単な常微分方程式モデルが得られる。

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= -\gamma I + \beta SI, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \\ S(0) &= S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, \end{aligned}$$

ここで、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ はそれぞれ時刻 t における未感染者、感染者、免疫者の人口密度を表しており、 $S_0 > 0$, $I_0 > 0$, $R_0 \geq 0$ とする。また、 $\beta > 0$, $\gamma > 0$ はそれぞれ伝達係数、回復率と呼ばれる。(1.1) は Kermack-McKendrick の SIR モデルと呼ばれており、このモデルに基づいた研究としてペストの流行や寄宿学校でのインフルエンザ流行の分析がある ([2], [5])。

伝染病の流行過程を明らかにする上で重要な問題のひとつは、「いかなる状況において初期流行がおこるか」数理的に説明することである。ここで初期流行とは、伝染病が対象としている個体群に「侵入直後に」感染者数が増大する状況のことである。数学的に言い換えると、ある実数 $T > 0$ が存在して、 $0 < t < T$ なる実数 t に対しては

$$\frac{dI}{dt}(t) > 0$$

が成立することである。

(1.1), (1.2) を数学的に解析することによって、先の問題に対する回答のみならず、伝染病の流行過

程に関するいくつかの性質を説明することができる。(1.1)の第1式と第2式は $S(t)$ と $I(t)$ について閉じているから、これらの挙動について解析を行えば十分である。実際、 $\frac{dS}{dt} \neq 0$ の仮定の下で

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt} = \frac{-\gamma I + \beta SI}{-\beta SI} = \frac{\gamma I}{\beta S} - 1$$

となる。これより

$$I(S) = \frac{\gamma}{\beta} \log S - S + C, \quad C \text{ は積分定数}$$

この結果をもとに相平面解析を行って、次の結果を得る。

定理 1.1 ([1], [5]) 初期値問題 (1.1), (1.2) の解を $S(t)$, $I(t)$ とする。このとき次が成り立つ。

- (i) 初期値によらず、任意の $t > 0$ に対して $\frac{dS}{dt} < 0$
- (ii) $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、任意の $t > 0$ に対して $\frac{dI}{dt} < 0$
- (iii) $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、実数 $t_c > 0$ が存在し

$$\frac{dI}{dt} \begin{cases} > 0 & 0 < t < t_c \\ = 0 & t = t_c \\ < 0 & t_c < t \end{cases}$$

- (iv) $S(t)$, $I(t)$ とともに $t \rightarrow \infty$ の極限が存在する。詳しくは

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

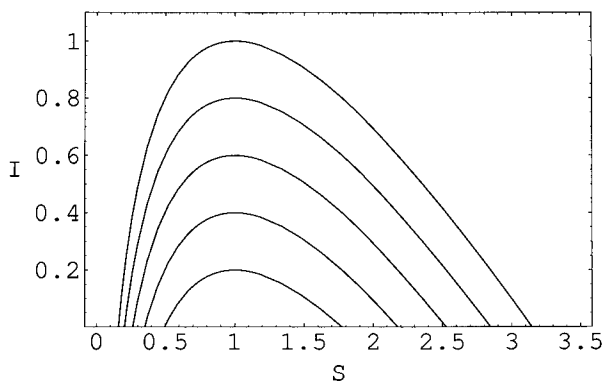


図 1.1 (1.1) の解の相平面 : $\beta = \gamma = 1$

定理 1.1 の主張の意味は、次の通りである。

- ・ 初期の状態によらず、未感染者数は単調に減少する。
- ・ $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、初期流行は起こらない。すなわち、感染者数は単調に減少する。
- ・ $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、初期流行が起こる。すなわち、しばらくの間感染者数は増加する。そして、有限の時刻内に S_n の値はピークに達した後、単調に減少し続ける。
- ・ 十分時間が経過すると、感染者数は限りなく零に近づく。一方、未感染者数も限りなく一定の数に

近づくが、その数は零ではない。このことは、最後まで感染しない者がいることを意味している。

(1.1) の数値シミュレーションを行うための最も単純な離散化は、導関数を前進差分で置き換えることである。その結果、次の離散モデルを得る。

$$(1.3) \quad \begin{cases} S_{n+1} = (1 - h\beta I_n)S_n, \\ I_{n+1} = \{1 + h(-\gamma + \beta S_n)\}I_n, \\ R_{n+1} = R_n + h\gamma I_n. \end{cases}$$

ここで、 $h > 0$ は離散時間の幅である。(1.3) は微分方程式の離散化としてではなく、離散時間における「変化率」の関係を定式化した離散モデルとして、十分考察の対象となり得るものである。

本稿の目的は、離散モデル (1.3) の妥当性について調べることである。すなわち、(1.3) の解が、連続モデル (1.1) 解と定性的に同じ性質を持つこと、とりわけ、時間大域的ダイナミクスが一致することを示す。我々が得た結果は次の通りである。

定理 1.2 $1 - h\beta I_0 > 0$, $1 - h\gamma > 0$ が成り立っているものとする。このとき、漸化式 (1.3) で定められる $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ について、次が成り立つ。

- (i) 任意の自然数 n に対して $S_{n-1} > S_n$
- (ii) $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、任意の自然数 n に対して $I_{n-1} > I_n$
- (iii) $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ のとき、ある自然数 N_0 が存在し

$$I_0 < I_1 < \dots < I_{N_0-1} \leq I_{N_0}$$

$$n > N_0 \text{ なる自然数 } n \text{ に対して } I_{n-1} > I_n$$

- (iv) $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ とともに $t \rightarrow \infty$ の極限が存在する。詳しくは

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_n > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_n = 0$$

次節では定理 1.2 の証明を行い、第 3 節で考察を行う。

2 定理 1.2 の証明

定理の証明のために必要な補題を準備する。まず、 $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ の場合について考える。このとき、 $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ とともに最終的には収束することを示す。

補題 2.1. (1.3) の初期値 (S_0, I_0) とパラメータ $h > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ が条件

$$S_0 < \frac{\gamma}{\beta}, \quad 1 - h\beta I_0 > 0, \quad 1 - h\gamma > 0$$

を満たしているとする。このとき、 $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ はともに単調減少列で収束する。特に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

証明 仮定と漸化式から

$$S_1 = (1 - h\beta I_0)S_0 < S_0, \quad I_1 = \{1 + h(-\gamma + \beta S_0)\}I_0 < I_0$$

がわかる。このとき

$$S_1 < S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$$

かつ

$$1 - h\beta I_1 > 1 - h\beta I_0 > 0$$

今、 $S_n < \frac{\gamma}{\beta}$ かつ $1 - h\beta I_n > 0$ が成り立っているとす。このとき

$$S_{n+1} = (1 - h\beta I_n)S_n < S_n,$$

また

$$1 + h(-\gamma + \beta S_n) < 1 + h(-\gamma + \beta S_0) < 1, \quad 1 + h(-\gamma + \beta S_n) > 1 - h\gamma > 0$$

であるから

$$I_{n+1} = \{1 + h(-\gamma + \beta S_n)\}I_n < I_n$$

がわかる。よって帰納的に $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ がともに正値な単調減少列であり、収束することがわかる。さらに

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_0 \prod_{k=0}^n \{1 + h(-\gamma + \beta S_k)\} \\ &\leq I_0 \{1 + h(-\gamma + \beta S_0)\}^{n+1} \end{aligned}$$

となるが、 $0 < 1 + h(-\gamma + \beta S_0) < 1$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ となる。

$\{S_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ における極限值については、次のことがわかる。

補題 2.2. 補題 2.1 の仮定の下で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > 0$$

証明 まず

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - h\beta I_k)$$

であることに注意する。この式の両辺の対数をとれば

$$\log S_n = \log S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \log(1 - h\beta I_k)$$

もしも $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ であったとすると、

$$(2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \sum_{k=1}^{n-1} \log(1 - h\beta I_k) = \infty$$

となるはずである。 $b_n = -\log(1 - h\beta I_n)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{I_n} &= -\frac{1}{I_n} \log(1 - h\beta I_n) \\ &= h\beta \log\{1 + (-h\beta)I_n\} \frac{1}{-h\beta I_n} \end{aligned}$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ に注意すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{I_n} = h\beta$$

であることがわかり、十分大きい n に対して

$$0 < A < \frac{b_n}{I_n} < B$$

なる実数 A, B が存在することがわかる。前補題より、 I_n の収束のオーダーは、 $0 < r < 1$ なる実数 r があって $I_n = O(r^n)(n \rightarrow \infty)$ となるから、 $\sum_{n=1}^{\infty} I_n < \infty$ である。よって、級数に関する判定定理より $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ であることがわかるが、これは (2.1) に矛盾する。

ここまでの2つの補題から、初期条件が $S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$ を満たす場合の時間大域的挙動は明らかになった。次に、 $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ の場合について考える。

補題 2.3. (1.3) の初期値 (S_0, I_0) とパラメータ $h > 0, \beta > 0$ が条件

$$S_0 > \frac{\gamma}{\beta}, \quad 1 - h\beta I_0 > 0$$

を満たしているとする。このとき、

(i) ある自然数 N が存在して

$$(2.2) \quad S_N < \frac{\gamma}{\beta}$$

となる。

(ii) (i) を満たす最小の自然数を N_0 とすると、 $n \leq N_0$ なる自然数 n に対して、

$$S_{n-1} > S_n$$

が成り立つ。 $\{I_n\}$ に対しては

$$I_0 < I_1 < \dots < I_{N_0-1} \leq I_{N_0}$$

が成り立つ。

証明 (i) 背理法による。どんな自然数 n に対しても常に $S_n \geq \frac{\gamma}{\beta}$ であったとする。このとき、すべての自然数 n について

$$1 > 1 - h\beta I_0 \geq \dots \geq 1 - h\beta I_n > 0$$

であるから

$$I_0 \leq \dots \leq I_n \leq I_{n+1} \leq \dots$$

すなわち、 $\{I_n\}$ は単調増加列である。一方 $\{S_n\}$ の式より、すべての自然数 n に対して

$$0 < 1 - h\beta I_n < 1$$

このとき

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_0 \prod_{k=0}^n (1 - h\beta I_k) \\ &\leq S_0 (1 - h\beta I_0)^{n+1} \end{aligned}$$

ところが、仮定より $0 < 1 - h\beta I_0 < 1$ であったから、十分大きい n に対して

$$(1 - h\beta I_0)^{n+1} S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$$

となるが、これは背理法の仮定に矛盾する。

(ii) 初めて不等式(2.2)が成り立つ自然数 N を N_0 とする。 $S_n \geq \frac{\gamma}{\beta}$ が成立している間、すなわち $n=0, 1, \dots, N_0-1$ のときは $0 < 1 - h\beta I_n < 1$ が成り立つから

$$S_{n+1} = (1 - h\beta I_n)S_n < S_n$$

となる。また N_0 の定義から

$$S_{N_0} < \frac{\gamma}{\beta} \leq S_{N_0-1}$$

である。 $\{I_n\}$ の単調性については、2つの場合に分けて考える。

$\frac{\gamma}{\beta} < S_{N_0-1}$ のとき、 $n=0, 1, \dots, N_0-1$ に対して $S_n > \frac{\gamma}{\beta}$ だから

$$1 + h(-\gamma + \beta S_n) > 1$$

となり

$$I_0 < I_1 < \dots < I_{N_0-1} < I_{N_0}$$

がわかる。

$\frac{\gamma}{\beta} = S_{N_0-1}$ のときは、 $n=0, 1, \dots, N_0-2$ に対して $S_n > \frac{\gamma}{\beta}$ となり、その結果

$$I_0 < I_1 < \dots < I_{N_0-2} < I_{N_0-1}$$

がわかる。また $1 + h(-\gamma + \beta S_{N_0-1}) = 1$ であるから

$$I_{N_0-1} = I_{N_0}$$

以上により題意が成り立つ。

補題 2.3 より、しかるべき条件の下では、 $S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$ なる初期値から出発しても、必ず有限の n で $S_n < \frac{\gamma}{\beta}$ となることがわかった。最後に、 $h > 0$ が十分小さいときには、 S_n が負とはならないことを示す。

補題 2.4. 補題 2.3 の仮定が成り立つものとする。さらに、 $h > 0$ が十分小さいとき、 $S_{N_0} > 0$ が成り立つ。

証明 N_0 の h に関するオーダーを調べる。

$$\begin{aligned} S_{N_0} &= S_0 \prod_{k=0}^{N_0-1} (1 - h\beta I_k) \\ &\leq S_0 (1 - h\beta I_0)^{N_0} \end{aligned}$$

であるから、 $S_0 (1 - h\beta I_0)^{N_0} < \frac{\gamma}{\beta}$ が成り立つことは、 $S_{N_0} < \frac{\gamma}{\beta}$ であるための十分条件である。この不等式を N_0 について解いて

$$N_0 > \frac{\log \frac{\gamma}{\beta S_0}}{\log(1 - h\beta I_0)}$$

が得られ、右辺の値は高々 $O\left(\frac{1}{h}\right)$ ($h \rightarrow +0$) であることがわかる。

一方、 $S_{N_0} < 0$ となるならば、

$$S_{N_0} = (1 - h\beta I_{N_0-1})S_{N_0-1}$$

だから

$$(2.3) \quad 1 - h\beta I_{N_0-1} < 0$$

でなければならない。

$$\begin{aligned} I_{N_0-1} &= I_0 \prod_{k=0}^{N_0-2} \{1 + h(-\gamma + \beta S_k)\} \\ &\leq I_0 \{1 + h(-\gamma + \beta S_0)\}^{N_0-1} \end{aligned}$$

に注意すると

$$1 < h\beta I_0 \{1 + h\alpha\}^{N_0-1}$$

が成り立つことは (2.3) が成立するための必要条件である。ここで、 $\alpha := -\gamma + \beta S_0 > 0$ とおいた。この不等式を N_0 について解くと

$$N_0 > -\frac{\log(h\beta I_0)}{\log(1 + h\alpha)}$$

となるが、この右辺は $O\left(\frac{|\log h|}{h}\right)$ ($h \rightarrow +0$) である。よって $S_n < 0$ となる前に $S_n < \frac{\gamma}{\beta}$ となることがわかる。

補題 2.3 で定まる N_0 に対し、 (S_{N_0}, I_{N_0}) をあらためて初期値とみなして $\{S_n\}$, $\{I_n\}$ の時間発展を考えると、補題 2.1, 2.2 を適用することができる。以上の結果をあわせて、定理の主張が得られる。

3 考 察

本小論では、離散モデル (1.3) の解の定性的性質について調べ、(1.3) が連続モデル (1.1) の定性的性質を保持していることを示した。微分方程式とそれを離散化して得られる離散モデルの比較は、はじめに固定した有限時間内において有効であって、両者の時間大域的ダイナミクスが定性的に同じであることは全く自明ではない。

導関数をオイラーの前進差分に置き換えただけの離散モデルは、「変化率」の関係式であるという点では微分方程式モデルと同じである。単純な漸化式となった離散モデルは、数値シミュレーションが表計算ソフトで実行できるほど一見単純である。しかしながら、ロジスティック方程式のように、微分方程式とその離散方程式が定性的に全く異なる性質をもつ場合があり、ダイナミクスまでもが単純であるというわけではない ([3], [4], [6])。離散モデルの正当性を示すことは、基本的かつ重要な問題である。

Kermack-McKendrick の SIR モデルは、感染症の伝播を記述するもっとも単純化されたモデルであった。本モデルは出生、死亡の過程を無視して総人口は一定であると仮定している。このことは、数学的には 3 つの式を辺々加えて

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

となることからわかる。実際の感染過程は複雑であり、SIR モデルを起源として再感染、伝染の媒介者を考慮に入れたモデルなど様々な派生モデルが存在する ([1], [6])。

参考文献

- [1] 稲葉寿, 感染症の数理モデル, 培風館, 2008.
- [2] W.O.Kermack and A.G.McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc., Vol. A115, pp.700-721, 1927.
- [3] R.M.May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems, 2nd Edition*, Princeton University Press, 1973.
- [4] R.M.May, Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos, Science Vol.186, pp.645-647, 1974.
- [5] J.D.Murray, *Mathematical Biology*, Springer, 2002.
- [6] 瀬野裕美, 数理生物学—個体群動態の数理モデリング入門—, 共立出版, 2007.